数理解析研究所講究録
840 巻 1993 年 32-37

一般化されたスピンモデル

九大 理　坂内悦子 (Etsuko Bannai)

スピンモデルは Jones [6] によって定義された。

定義 1. (Symmetric spin model) 有限集合 X と $X \times X$ 上に定義された複素数値関数 w_+, w_- が与えられたとき次の条件 (0), (1), (2), (3) が任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して成立つ時 (X, w_+, w_-) をスピンモデルと呼ぶ。

(0) (Symmetric condition)

$$w_+(\alpha,\beta) = w_+(\beta,\alpha), \quad w_-(\alpha,\beta) = w_-(\beta,\alpha),$$

(1) $w_+(\alpha,\beta)\, w_-(\alpha,\beta) = 1$,

(2) $\displaystyle\sum_{x\in X} w_+(\alpha,x)\, w_-(x,\beta) = n\,\delta_{\alpha,\beta}$,

(3) (Star triangle relation)

$$\sum_{x\in X} w_+(\alpha,x)\, w_+(x,\beta)\, w_-(\gamma,x) = D\, w_+(\alpha,\beta)\, w_-(\gamma,\alpha)\, w_-(\gamma,\beta)$$

ここで $|X| = n = D^2$ である。

スピンモデルから向きづけられたリンクの不変量がつくれ

る事は知られている [6]. Jones による定義は関数 w_+, w_- が対称であるという条件 (0) を与えている。この条件 (0) を落して対称でないものを含めた型の定義が宗政-綿谷によって与えられた [7]。

定義 2. (Generalized spin model) 有限集合 X と $X \times X$ 上で定義された複素数値関数 w_+, w_- が与えられたとき次の条件 (1), (2), (3) が任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して成立つならば (X, w_+, w_-) をスピンモデルと呼ぶ。

(1) $w_+(\alpha,\beta)\, w_-(\beta,\alpha) = 1$,

(2) $\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x)\, w_-(x,\beta) = n\,\delta_{\alpha,\beta}$,

(3) (Star triangle relation)

$$\sum_{x \in X} w_+(\alpha,x)\, w_+(x,\beta)\, w_-(x,\gamma) = D\, w_+(\alpha,\beta)\, w_-(\alpha,\gamma)\, w_-(\beta,\gamma)$$

ここで $|X| = n = D^2$ である.

この対称性を仮定しないスピンモデルからもリンクの不変量がつくれることが知られている。

数理研での講演では、スピンモデルの定義をさらに一般化したものを与えた.

定義 3. (Generalized generalized spin model) 有限集合 X と $X \times X$ 上に定義された複素数値関数 w_1, w_2, w_3, w_4

が次の条件(1), (2), (3a), (3b) を任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して
みたす時 (X, w_1, w_2, w_3, w_4) をスピンモデルと呼ぶ.

(1) $w_1(\alpha,\beta)w_3(\beta,\alpha)=1$, $w_2(\alpha,\beta)w_4(\beta,\alpha)=1$,

(2) $\displaystyle\sum_{x\in X} w_1(\alpha,x)w_3(x,\beta)=n\delta_{\alpha,\beta}$,

$\displaystyle\sum_{x\in X} w_2(\alpha,x)w_4(x,\beta)=n\delta_{\alpha,\beta}$,

(3a) $\displaystyle\sum_{x\in X} w_1(\alpha,x)w_1(x,\beta)w_4(\gamma,x)=Dw_1(\alpha,\beta)w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)$,

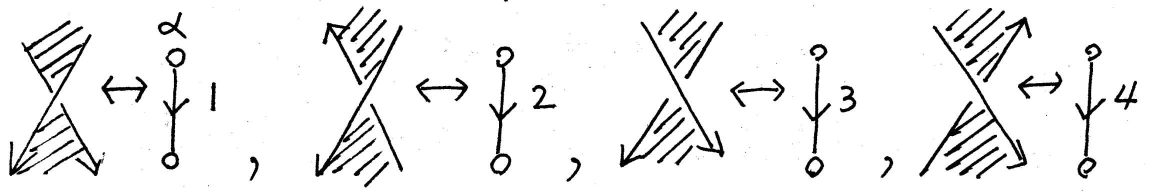
(3b) $\displaystyle\sum_{x\in X} w_1(x,\alpha)w_1(\beta,x)w_4(x,\gamma)=Dw_1(\beta,\alpha)w_4(\alpha,\gamma)w_4(\beta,\gamma)$,

ここで $|X|=n=D^2$ である.

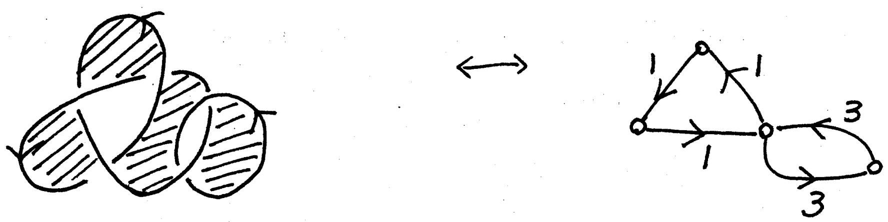
この時、向きづけられたリンクの不変量が次のようにして定義される。(実際には以下の考察を経て一般化されたスピンモデルの定義にいたったのである。)

向きづけられたリンクのダイアグラム L が与えられた時 L は平面をいくつかの領域にわけているが、それ等を黒と白にぬりわける. この時有界でない領域を白に、となりあった領域は異なる色になるようにする. この色づけられたダイアグラムから番号づけられた有向グラフを次の様にしてつくる。黒くぬられた領域には頂点を各交点には辺を対応させる. 向きづけられたリンクのダイアグラムの各交点はその向きづけ

と黒白の色づけにより4つの種類に分かれる。それぞれに対応するグラフの辺$\alpha \circ\!\!\rightarrow\!\!\circ \beta$とその番号$n(\alpha\to\beta)$は



で与える。下の図は色づけられたリンクのダイアグラムとそれから得られた番号づけられた有向グラフの例である。



次に$v(L)$で頂点の個数(すなわち黒くぬられた領域の個数)を表わす。この時一般化されたスピンモデル(X, w_1, w_2, w_3, w_4)を使って partition function Z_Lを次の様に定義する.

$$Z_L = D^{-v(L)} \sum_{\substack{\sigma \\ \text{states}}} \prod_{\substack{\alpha\to\beta \\ \text{edges}}} w_{n(\alpha\to\beta)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$$

ただし states σ とは上で定義した有向グラフの頂点集合からXへの写像である。このとき定義3の条件(1),(2)はZ_Lがtype II の Reidemeister move (方向と色づけを考えると8種類ある)によって不変である事を保証し条件(3a)と

(3b) は Z_L が type III の Reidemeister move (同じく16種類ある) によって不変である事を保証する。

さて、定義3 から次の命題が容易に証明される.

命題 4. 複素数 $a \neq 0$ が存在して、任意の $\alpha \in X$ に対して次の式が成立つ.

$$\sum_{x \in X} w_2(\alpha, x) = \sum_{x \in X} w_2(x, \alpha) = D\, w_3(\alpha, \alpha) = D a^{-1}$$

$$\sum_{x \in X} w_4(\alpha, x) = \sum_{x \in X} w_4(x, \alpha) = D\, w_1(\alpha, \alpha) = D a .$$

命題4 で与えられた等式は Z_L を normalize して type I の Reidemeister move についても不変なものにすることができるという事を保証している。([5], [6] 参照)

一般化されたスピンモデルは Jones 及び 宗政-綿谷 によるスピンモデルを含んでいる。すなわち $X \times X$ 上に2つの関数 w_+, w_- が与えられて、一般化されたスピンモデル (X, w_1, w_2, w_3, w_4) の2つの関数 w_1, w_2 が $\{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ に含まれ w_3, w_4 が $\{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ に含まれる時 (X, w_+, w_-) は宗政-綿谷によるスピンモデル (定義2) か又はその転置した形のものになることが示される。ここで $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{+, -\}$ ${}^t w_\varepsilon(\alpha, \beta) = w_\varepsilon(\beta, \alpha)$ である。この様な場合を Jones type

のスピンモデルと呼ぶことにする。この様に W_1, W_2, W_3, W_4 のうちの2つが $\{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$ に含まれ残る2つが $\{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ に含まれる場合を特にとりあげる。

$W_1, W_4 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$ かつ $W_2, W_3 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ となる場合 W_+, W_- はともに対称条件をみたす。この場合を pseudo-Jones type のスピンモデルと呼ぶことにする。

$W_1, W_3 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$ かつ $W_2, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ をみたすとき，W_+ 又は W_- はアダマール行列となる。この場合をアダマール type のスピンモデルと呼ぶことにする。 Hadamard type のスピンモデルは Jones type のものとかなり異なった形をしている。

以上アブストラクト的に述べてきたがより詳しく知りたい方のために投稿中の論文の preprint (with Eiichi Bannai) をつけ加えておく。以上の文中の参考文献の番号はこの preprint の references の番号を示している。